

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по научной работе  
ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

доктор физико-математических наук,  
профессор В.Д. Бучельников



### О т з ы в

ведущей организации на диссертацию Коротких Андрея Сергеевича «Динамика концентраций, определяемая нелинейным уравнением «реакция-диффузия» и его обобщениями», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

**Актуальность темы исследования.** В диссертационной работе рассмотрена задача о многомодовых бифуркациях решений многопараметрических краевых и начально-краевых задач для уравнений вариационного типа с гладкими полиномиальными нелинейностями. Основная область приложений рассмотренных в диссертации уравнений — анализ посткритической динамики концентраций и многомодовых закритических прогибов упругих балок и пластин. Основные исследуемые вопросы — вычисление и анализ многомодовых ветвей (локальных и нелокальных) стационарных решений и построение трасс спуска из произвольных начальных точек (общего положения) в финальные точки, расположенные вблизи локальных минимумов функционала энергии.

Теоретическая основа исследования вариационных задач многомодового анализа были заложены еще в 1978 году в работах М.А. Красносельского, Н.А. Бобылева и Э.М. Мухамадиева, в которых впервые была введена и использована вариационная модификация метода Ляпунова — Шмидта. Позже подход Красносельского — Бобылева — Мухамадиева развивался Ю.И. Сапроновым и его учениками (см. обзоры Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Конечномерные редукции в гладких экстремальных

задачах // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 1. С. 101–132 и Сапронов Ю.И. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. Т. 12. С. 3–134, а также монографию Костин Д.В., Сапронов Ю.И. Функциональный анализ и многомодовые прогибы упругих систем. Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2012. 207 с.). Была создана новая версия вариационного метода Ляпунова — Шмидта, способная осуществлять как локальный, так и нелокальный бифуркационный анализ многопараметрических вариационных задач в условиях многомерного вырождения.

Важным содействующим обстоятельством успешного развития многомодового анализа (как локального, так и нелокального) явилось систематическое использование идей и методов теории особенностей гладких функций, развитой Х. Уитни, Р. Томом, В.И. Арнольдом и их многочисленными последователями. На многопараметрические вариационные задачи эти методы были перенесены посредством конечномерных усечений фредгольмовых функционалов по вариационной версии Ляпунова — Шмидта.

Безусловно, задача исследования посткритических перестроек весьма актуальна и требует привлечения разнообразных методов современного математического анализа и новых вычислительных средств. Потребность в развитии новых методов бифуркационного анализа, соответствующих новым запросам практики и современным достижениям вычислительных технологий, сохраняется до сих пор.

**Первая глава** диссертации носит вспомогательный характер, в ней кратко изложен используемый математический аппарат и приведены близкие результаты других авторов. Показано, как после построения параметрических базисных семейств собственных элементов (необходимых для построения ритцевской аппроксимации функционала энергии) можно построить главную часть ключевой функции. Вследствие такого построения может быть получена исчерпывающая информация о строении каустики (дискриминантного множества) и достаточно полное описание допустимых bif-раскладов посткритических состояний. В этой главе изучено одномерное уравнение «реакция-диффузия»: описаны локальные и нелокальные бифуркации стационарных решений и предложен алгоритм спуска из начальной точки в финальную точку вблизи точки минимума функционала энергии.

Метод, развитый в первой главе, апробирован **во второй главе** при изучении посткритических концентраций в двумерных и трехмерных средах, а также при изучении решений уравнений прогибов упругих балок и пластин на упругом основании в условиях двухмодового вырождения. Из

используемых во второй главе методов на первом плане находятся методы функционального анализа, численные методы, традиционные и новые методы теории бифуркационного анализа, и ряд новых методов теории гладких функций многих переменных, включая теорию катастроф.

**Третья и четвертая главы** посвящены локальным и нелокальным стационарным трехмодовым бифуркациям, а также вопросам построения трасс спуска — дискретных траекторий спуска из произвольных начальных состояний в окрестности точек минимума функционала энергии. В четвертой главе приведен алгоритм построения трасс спуска. Здесь же содержатся результаты, обобщающие результаты глав 2 и 3 на случай уравнений Кана — Хилларда и Свифта — Хойенберга. Приведены результаты соответствующих вычислений, включая результат полиномиальной аппроксимации ключевой функции, графические изображения нелокальных ключевых функций и решений исходных краевых задач. Показано, что в случае уравнения Свифта — Хойенберга возникает 3-модовое вырождение. Вычислены соответствующие главные части локальных ключевых функций (от трех ключевых переменных). В этой же главе представлены программные коды, результаты вычислений и компьютерная графика.

**Положения, вынесенные на защиту:** 1) обоснование применимости методов «фредгольмова анализа» в бифуркационном анализе рассмотренных бесконечномерных динамических систем; 2) описание отдельных типовых многомодовых бифуркаций стационарных состояний в случаях уравнения реакции-диффузии с кубической нелинейностью, уравнения Кана — Хилларда, уравнения Свифта — Хойенберга; 3) построение и анализ трасс спуска для уравнения реакции-диффузии, редуцированного в подпространство функций с нулевым средним; 4) теоремы о главных частях локальных ключевых функций; 5) асимптотические представления ветвей бифурцирующих решений; 6) создание и обоснование общего алгоритма вычисления нелокальных ветвей бифурцирующих экстремалей; 7) создание и обоснование общего алгоритма построения трасс спуска в точки минимума функционалов энергии из случайно выбранных начальных точек общего положения; 8) построение компьютерных графических иллюстраций.

Необходимо отметить следующие **недостатки работы:**

1) отсутствие комментариев о возможности исследования аналогичных задач в рамках невариационных моделей;

2) отсутствие нетривиальных и убедительных примеров исчерпывающего описания каустики (после формулировки определения 6);

3) после определения 10 (стр. 26) нет пояснения к употребленному термину « $\theta$  — координатная форма отображения  $\tau$ »;

4) на стр. 43–44 использована фраза «в случае минуса», не понятно к чему относящаяся;

5) вызывает недоумение то, что автор диссертации не предпринял попытку проведения полного локального анализа главной части ключевой функции, полученной в теореме 8;

6) в работе имеется немало количество опечаток (часто в окончаниях слов);

7) литература оформлена неаккуратно и в разнобой: часть источников по одному ГОСТу, другая часть здесь же — по другому ГОСТу, источник [49] набран прописными буквами, сокращения в одних и тех же названиях журналов делались по разному или не делались вообще и т. п.

Несмотря на указанные недостатки, диссертационная работа в целом производит благоприятное впечатление. В ней содержится решение важной и интересной задачи, а также приведен ряд примыкающих важных результатов, представляющих реальный научный интерес для современной теории динамических систем.

**Заключение.** Тема диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Текст работы изложен достаточно ясно, основные теоремы четко сформулированы и полностью доказаны, имеется достаточное количество графических компьютерных иллюстраций. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертационной работы. Результаты диссертации прошли достаточную апробацию на международных и общероссийских научных конференциях и научных семинарах. Все основные результаты своевременно опубликованы в 12 печатных трудах, из которых 5 — в изданиях, рекомендованных ВАК для публикации результатов кандидатских и докторских диссертаций.

Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях, проводимых коллективами Воронежского, Московского, Нижегородского, Самарского, Саратовского, Челябинского и Ярославского государственных университетов, а также Математического института им. В.А. Стеклова РАН и Южного федерального университета.

Диссертация А.С. Коротких представляет собой законченное математическое исследование на актуальную тему, в ней изложено решение новой научной задачи, имеющей несомненную научную значимость для специальности 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертационная работа А.С. Коротких «Динамика концентраций, определяемая нелинейным уравнением «реакция-диффузия» и его обобщениями» удовлетворяет всем требованиям Положения о присуждении ученых

